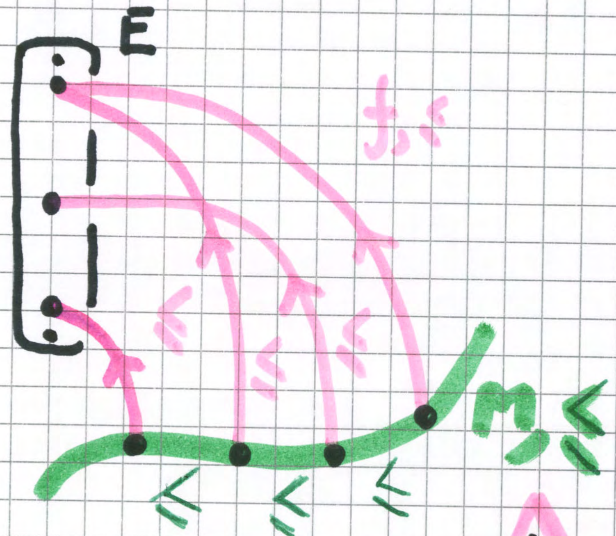
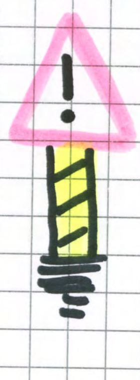
RECTIFICATION DE FONCTIONS

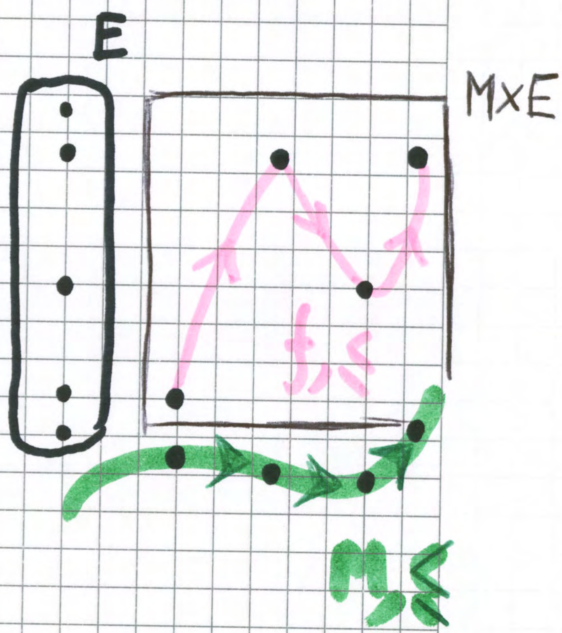
□ Toute fonction $f : M \to E$ définie sur un monotone M est un monotone défini grâce au transport de la monotonie par la bijection

$$M \to f : m \mapsto (m, f(m))$$

qui devient d'emblée isomorphisme de monotones







Rappels

Si E_1, d_1 et E_2, d_2 sont des espaces métriques

Alors $E_1 \times E_2,\ d_1 + d_2$ sont espaces métriques

$E_1 \times E_2,\ \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

de même topologie

* $\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \leq d_1 + d_2 \leq \sqrt{2}\,\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

Remarques éventuelles :

261**

☐ Toute fonction $f : M, \leqslant, d \longrightarrow E, \delta$ d'un monotique dans un espace métrique peut se munir d'une structure de

monotique $f, \leqslant, d+\delta$

ou de

monotique $f, \leqslant, \sqrt{d_1^2+\delta^2}$ ■

☐ Le monotique $f, \leqslant, d+\delta$ est rectifiable

ssi

le monotique $f, \leqslant \sqrt{d^2+\delta^2}$ est rectifiable ■

Fonction $f : M, \leq, d \longrightarrow E, \delta$

$f, \leq, d+\delta$ est monotrique

Calculons sa $(d+\delta)$-longueur !

$$\operatorname{long} f = \sup \left\{ \operatorname{long} F \;\middle|\; F \text{ est une partie finie de } f \right\}$$

$$F = \left\{ (x_1, fx_1), (x_2, fx_2), \ldots, (x_n, fx_n) \right\} \quad \text{où} \quad x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n$$

$$\begin{aligned} \operatorname{long} F = \; & (d+\delta)\big((x_1, fx_1), (x_2, fx_2)\big) \\ + \; & (d+\delta)\big((x_2, fx_2), (x_3, fx_3)\big) \\ + \; & \ldots \\ + \; & (d+\delta)\big((x_{n-1}, fx_{n-1}), (x_n, fx_n)\big) \\ = \; & d(x_1, x_2) + \delta(fx_1, fx_2) \\ + \; & d(x_2, x_3) + \delta(fx_2, fx_3) \\ + \; & \ldots \\ + \; & d(x_{n-1}, x_n) + \delta(fx_{n-1}, fx_n) \\ = \; & \operatorname{long}_d \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} + VF \end{aligned}$$

$VF \triangleq \delta(fx_1, fx_2) + \delta(fx_2, fx_3) + \ldots + \delta(fx_{n-1}, fx_n)$ s'appelle la VARIATION de la fonction F

lors $\operatorname{long} f = \sup \left\{ \operatorname{long}_d \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} + VF \;\middle|\; F \text{ est une partie finie de } f, \; n \in \omega_0 \right\}$

$\sup \left\{ \operatorname{long}_d \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \;\middle|\; \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset M, \; n \in \omega_0 \right\} + \sup \left\{ VF \;\middle|\; F \text{ est une partie finie de } f \right\}$

$\operatorname{long}_d M + Vf$

$Vf \triangleq \sup \left\{ VF \;\middle|\; F \text{ est une partie finie de } f \right\}$ s'appelle la VARIATION de f

La VARIATION (TOTALE) Vf d'une fonction

$$f : M, \leqslant \longrightarrow E, d$$

d'un monotal fini dans un espace métrique

= Somme des distances des images des paires de points successifs

La VARIATION (TOTALE) Vf d'une fonction

$$f : M, \leqslant \longrightarrow E, d$$

d'un monotal dans un métrique

= Supremum de l'ensemble des ▽ variations de f sur les sous-monotaux finis de M ▲

□ Au chapitre 19,

le nombre $|s|$ attaché à la suite s est la variation

de $s : \{0, 1, \ldots, n-1\}, \leqslant \longrightarrow M, d$ ■

□ Pour tout monotrique $M, \leqslant, d$

$$\operatorname{long}(M, \leqslant, d) = V\left(1_M : M, \leqslant \longrightarrow M, d\right)$$ ■

□ Pour toute fonction $f : M, \leqslant, d \to E, \delta$

$$\operatorname{long}_{(d+\delta)} f = \operatorname{long}_d M + Vf$$

particulier

$A \subset \mathbb{R}$ —— fonction $f : A \to \mathbb{R}$

La longueur euclidienne de $f, \leq$ est finie

ssi

La taxilongueur de $f, \leq$ est finie

ssi

La variation (totale) de f est finie ■

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq b)$ —— fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

ixilongueur de f = $|b - a|$ + variation de f ■

■

$a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq b)$:

te fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

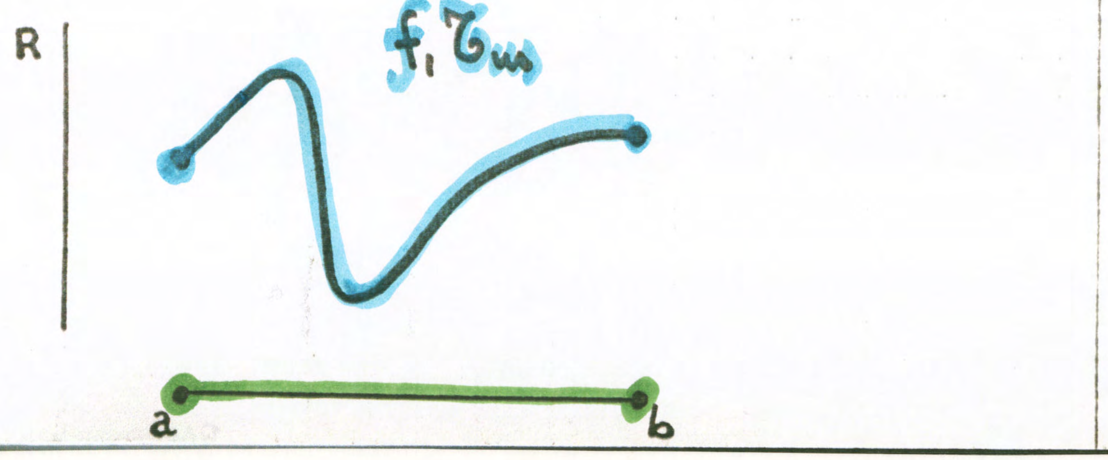
est arc (fermé) $f, \mathcal{T}_{us}$, sous-espace topologique de $\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{us}$

est arc métrique $f, \mathcal{T}_{us}, e$

est arc métrique $f, \mathcal{T}_{us}, t$

e = distance euclidienne , t = distance taximétrique) ■

SCHÉMA !



Pour toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f est continue $\Longrightarrow$ $f, \mathcal{T}_{us}, e$ — $f, \mathcal{T}_{us}, t$ sont arcs métriques

f est dérivable et f' est bornée sur $[a,b]$ $\Longrightarrow$ f, e — f, t sont de longueurs finies

f est dérivable et f' est continue sur $[a,b]$ $\Longrightarrow$ $\text{long}_e\, f = \int_a^b \sqrt{1+(f't)^2}\, dt$ — $\text{long}_t\, f = \int_a^b \sqrt{1+|f't|}\, dt$

On exprime les hypothèses de la 3ème implication en disant que

f est de classe C^1

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de CLASSE C^1 sur $[a,b]$

ssi

f est dérivable ET la dérivée $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue

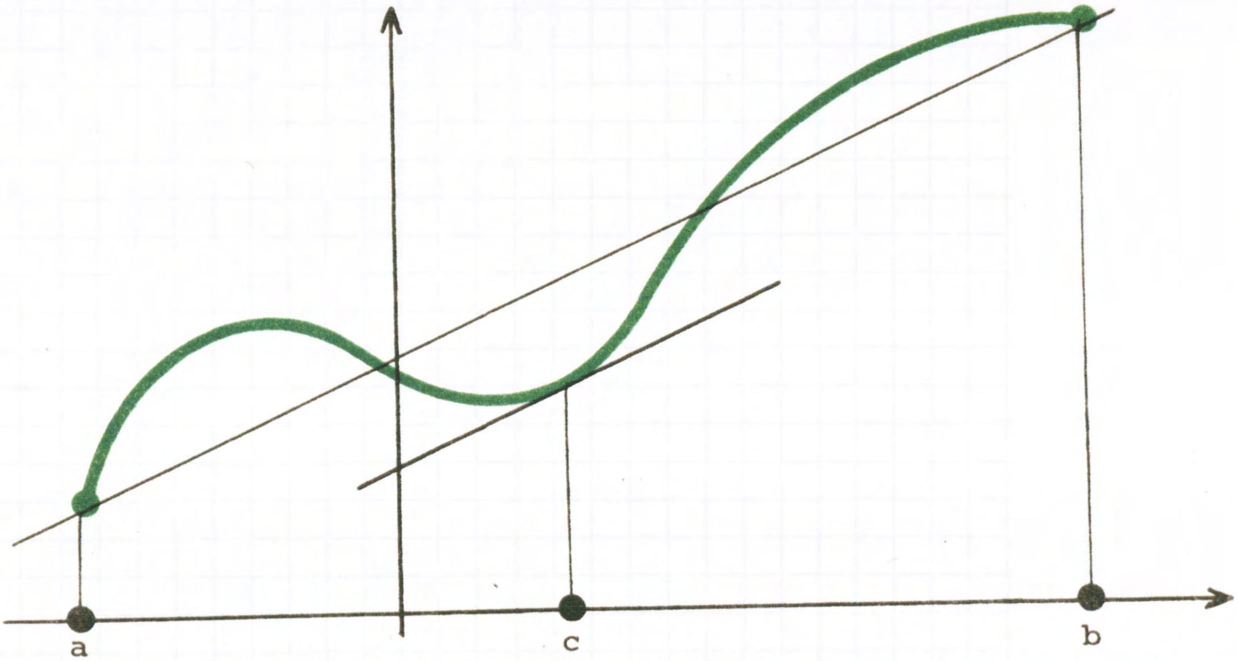
THEOREME — $a, b \in R$ — $a \neq b$

Si f : $[a,b] \rightarrow R$ continue

f dérivable en tout point de $]ab[$

Alors $\exists\, c \in]ab[\;:\; f(b) - f(a) = (b - a).f'(c)$

FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS



Par la formule des accroissements finis

$$\forall x, y \in [a,b] \; (x \neq y) \quad \exists\, \xi \in]x,y[\;:$$

$$f(y) - f(x) = (y-x)\, f'(\xi) \leq (y-x) \sup f'[a,b]$$

$$V_f < |b-a| . \sup f'[a,b] < \infty \qquad \blacksquare$$

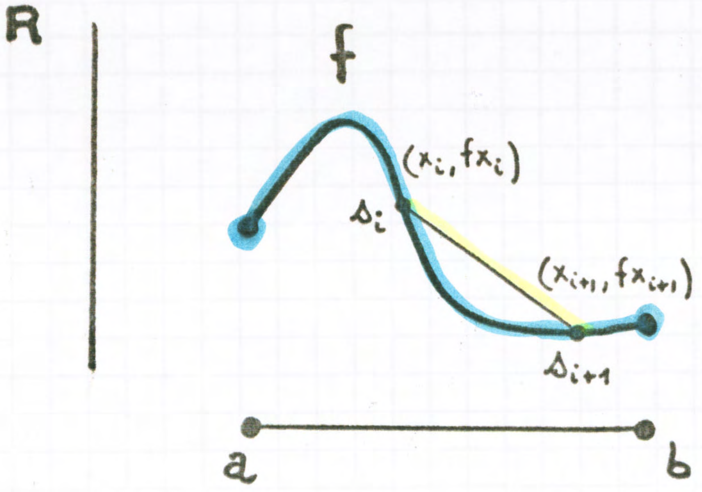
oisième implication

us-monotrique fini s de f

$s = \{a = s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n = b\}$ avec $s_1, s_2, \ldots, s_n$ successifs

$\mathrm{long}_e\, s = e(s_1, s_2) + e(s_2, s_3) + \ldots + e(s_{n-1}, s_n)$

Calculons chacun des termes $e(s_i, s_{i+1})$



$$e(s_i, s_{i+1}) = \sqrt{|x_{i+1} - x_i|^2 + |fx_{i+1} - fx_i|^2}$$

Par la formule des accroissements finis

$$\forall x_i, x_{i+1} \in [a,b] \quad \exists \xi_i \in]x_i, x_{i+1}[:$$

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = (x_{i+1} - x_i)\, f'(\xi_i)$$

$\vdash \quad e(s_i, s_{i+1}) = (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}$

$\vdash \quad \text{long}_e\, s = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}$

▶ $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{1 + (f'(x))^2}$

▸ $F_{\dot s} : [a,b] \longrightarrow R$ fonction en escalier

$$[x_1 = a, x_2[\longrightarrow R \; : \; x \longmapsto F\xi_1$$
$$[x_2, x_3[\longrightarrow R \; : \; x \longmapsto F\xi_2$$
$$\vdots$$
$$[x_{n-1}, x_n = b[\longrightarrow R \; : \; x \longmapsto F\xi_{n-1}$$

$$\vdash \quad \text{long}_e\, s = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, F(\xi_i) = \int_a^b F_{\dot s}\, dt$$

$F_{\dot s}$ est appelée "la fonction en escalier déterminée par la subdivision pointée $\dot s$"

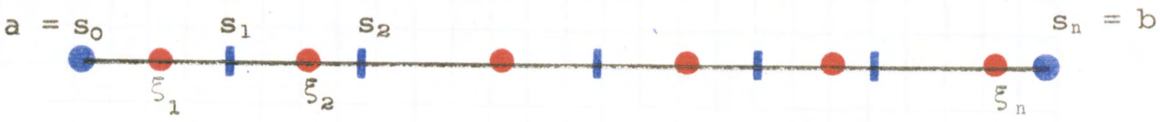
Les ξ_i sont ceux définis par la formule des accroissements finis

Voici $F : [a,b] \longrightarrow R$

Appelons s la subdivision finie de $[a,b]$

$$a = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b$$

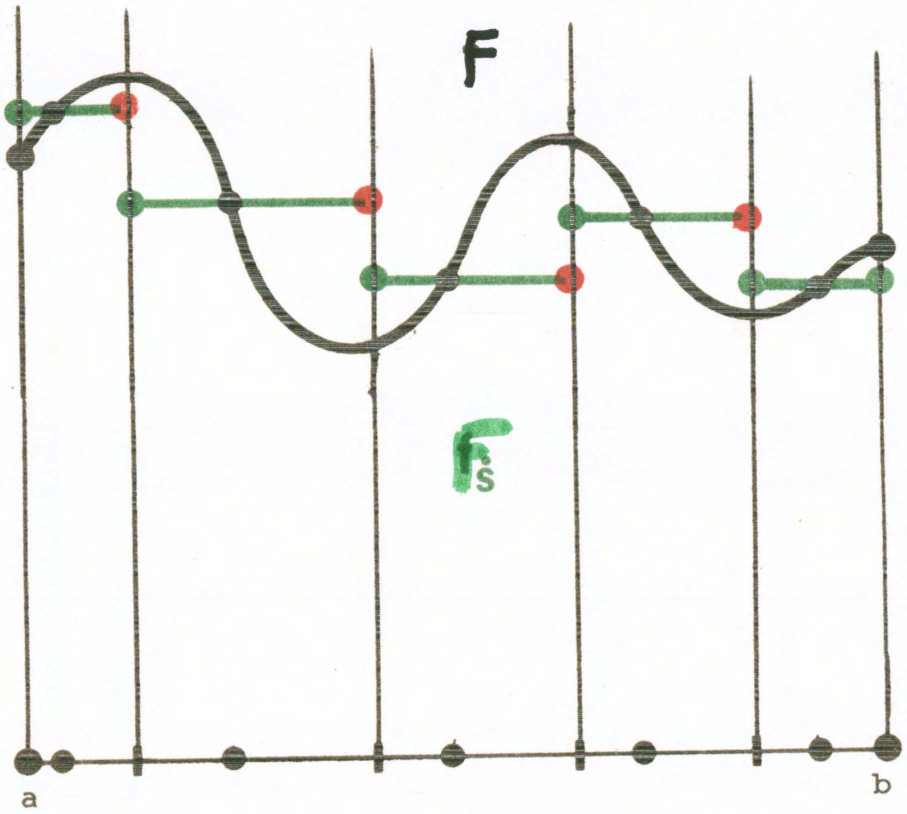
et $\dot s$ la SUBDIVISION POINTEE de $[a,b]$ définie en fixant dans chacun des segments $[s_{i-1}, s_i]$ de s un réel ξ_i



$$\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$$

Le réel strictement positif $\max \{ s_i - s_{i-1} \mid i \in \{1, \ldots, n\} \}$ est appelé le PAS de la subdivision pointée $\dot s$ et de la subdivision sous-jacente s.

La fonction F et la subdivision pointée $\dot s$ définissent la fonction en escalier $F_{\dot s}$



La fonction en escalier définie par la fonction F

et la subdivision pointée $\dot{s}$

$$\sup\left\{\int_a^b F_{\dot s}\,dt \;\middle|\; s \text{ est sous-monotrique fini de } f\right\} = \int_a^b F\,dt$$

suite croissante s_n de sous-monotriques finis de f telle que la suite des PAS de s_n converge vers 0

croissance de la suite signifie que $\forall i \in \omega : s_i \subset s_{i+1}$

PAS d'un monotrique fini est le maximum des distances de paires points successifs

$F : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1+(f'(x))^2}$ est continue

PROPOSITION 2 — Voici $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

Si la suite δ_n des pas des subdivisions pointées $\dot s_n$ converge vers 0

Alors $\lim F_{\dot s_n} = F$

Voici de manière abrégée ce que nous devons établir

$$\boxed{\forall \epsilon \in \mathbb{R}_0^+ \quad \exists m \in \omega \quad \forall p > m : \quad \|F_{\dot s_p} - F\| < \epsilon}$$

Démonstration

Voici $\epsilon \in \mathbb{R}_0^+$

Appliquons la proposition 1

$\exists\ \delta \in \mathbb{R}_0^+$ tel que

pour toute subdivision pointée $\dot s$ de $[a,b]$ de pas $< \delta$:

$$\|F - F_{\dot s}\| < \epsilon$$

$\lim \delta_n = 0$

$\exists\ m \in \omega \quad \forall p > m : \quad \delta_p < \delta$

Donc $\forall p > m : \quad \|F - F_{\dot s_p}\| < \epsilon$

Chapitre 11 - Proposition 2 — Voici $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

Si	la suite δ_n des pas des subdivisions pointées $\dot{s}_n$ de $[a,b]$	converge vers 0
Alors		$\lim F_{\dot{s}_n} = f$
Donc		$\int_a^b F\,dx = \lim \int_a^b F_{\dot{s}_n}\,dx$

d'autre part :

la suite $\dot{s}_n$ est croissante

la suite des intégrales $\int_a^b F_{\dot{s}_n}\,dt$ est croissante

$$\lim \int_a^b F_{\dot{s}_n}\,dt = \sup\left\{\int_a^b F_{\dot{s}_n}\,dt \mid n \in \omega\right\} \triangleq \sup \int_a^b F_{\dot{s}_n}\,dt$$

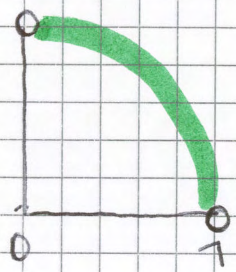
Il reste donc à voir que

$$\sup\left\{\int_a^b F_{\dot{s}}\,dt \mid \dot{s} \text{ est sous-monotrique fini de } f\right\} = \sup\left\{\int_a^b F_{\dot{s}_n}\,dt \mid n \in \omega\right\}$$

on a évidemment l'inégalité $\geq$
et puisque le 2d membre est indépendant de la suite $\dot{s}_n$
on voit facilement que l'inégalité $\neq$ conduit à une absurdité.

Le calcul de $\mathrm{long}_t\, f$ est laissé au lecteur ∎

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$$

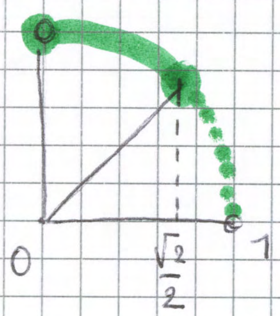


quart de cercle (de rayon 1)

malheureusement f n'est pas dérivable en $x=1$!

Qu'à cela ne tienne : on restreint son domaine

$$f : \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$$



huitième de cercle (de rayon 1)

$$\mathrm{long}_e(\text{Cercle}) = 8\int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt$$

$$2\pi = 8\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\boxed{\pi = 4\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}$$